Задача 1. Исходя из определения производной, найти $f'(0)$.

$$f(x)=\begin{cases}\sin(x\sin\frac{3}{x}), x\neq 0;\\ 0, x=0.\end{cases}$$

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(x\sin\frac{3}{\Delta x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\Delta x\sin\frac{3}{\Delta x}\right)\cdot\Delta x\sin\frac{3}{\Delta x}}{\Delta x\sin\frac{3}{\Delta x}\cdot\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\sin\frac{3}{\Delta x}}{\Delta x\sin\frac{3}{\Delta x}\cdot\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{3}{\Delta x}.$$

Задача 2. Составить уравнение нормали (в вариантах 1-12) или уравнение касательной (в вариантах 13-31) к данной кривой в точке с абсциссой x_0.

$$y=x-x^3, x_0=-1$$

$$y'=1-3x^2,$$

$$y(x_0)=0,$$

$$y'(x_0)=-2,$$

$y-y(x_0)=-\dfrac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)$ -уравнение нормали,

$$y=\frac{1}{2}(x+1),$$

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$$

Задача 3. Найти дифференциал dy.

$$y=tg(2\arccos\sqrt{1-2x^2}), x>0.$$

$$dy=\left(\frac{1}{\cos^2(2\arccos\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{1-(1-2x^2}}\cdot\frac{-4x}{2\sqrt{1-2x^2}}\right)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\cos^2(2\arccos\sqrt{1-2x^2})}\cdot\frac{4x}{\sqrt{2x^2}\cdot\sqrt{1-2x^2}}dx=\frac{4}{\sqrt{2}\cos^2(2\arccos\sqrt{1-2x^2})\cdot\sqrt{1-2x^2}}dx.$$

Задача 4. Вычислить приближенно с помощью дифференциала.

$y=\sqrt[3]{x}$, $x=1{,}21$.

Выберем $x_0=1,$ следовательно $\Delta x=0{,}21.$

$$y(x)=y(x_0+\Delta x)=y(x_0)+y'(x_0)\Delta x.$$

$$y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

$$y(x_0)=1,$$

$$y'(x_0)=\frac{1}{3},$$

$$y=1+\frac{1}{3}\cdot 0{,}21=1{,}07.$$

Задача 5. Найти производную.

$$y=\frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}.$$

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x\sqrt{1-3x^4}-\frac{-12x^3\cdot x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}}{1-3x^4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4x(1-3x^4)+12x^5}{2\sqrt{(1-3x^4)^3}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4x-12x^5+12x^5}{2\sqrt{(1-3x^4)^3}}=\frac{x}{\sqrt{(1-3x^4)^3}}.$$

Задача 6. Найти производную.

$$y=x+\frac{1}{1+e^x}-\ln(1+e^x).$$

$$y'=1+\frac{0-e^x}{(1+e^x)^2}-\frac{e^x}{1+e^x}=1-\frac{e^x}{(1+e^x)^2}-\frac{e^x}{1+e^x}.$$

Задача 7. Найти производную.

$$y=\ln^3(1+\cos x)$$

$$y'=3\ln^2(1+\cos x)\cdot\frac{-\sin x}{1+\cos x}=\frac{-3\sin x\ln^2(1+\cos x)}{1+\cos x}.$$

Задача 8. Найти производную.

$$y=ctg(\cos 5)-\frac{1}{40}\frac{\cos^2 20x}{\sin 40x}.$$

$$y'=0-\frac{1}{40}\cdot\frac{2\cdot 20\cos 2x(-\sin 20x)\sin 40x-40\cos^2 20x\cos 40x}{\sin^2 40x}=$$

$$=-\frac{1}{40}\cdot\frac{-40\cos 20x\sin 20x\sin 40x-40\cos^2 20x\cos 40x}{\sin^2 40}=\frac{\sin^2 40x+2\cos^2 20x\cos 40x}{2\sin^2 40x}.$$

Задача 9. Найти производную.

$$y=arctg\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}.$$

$$y'=\frac{1}{1+\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)^2}{x^2}}\cdot\frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}-\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\frac{x^2}{x^2+(\sqrt{1+x^2}-1)^2}\cdot\frac{x^2-(1+x^2)-\sqrt{1+x^2}}{x^2\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=\frac{-1-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(x^2+(\sqrt{1+x^2}-1)^2}.$$

Задача 10. Найти производную.

$$y = \frac{shx}{1+chx}.$$

$$y' = \frac{chx(1+chx) - sh^2 x}{(1+chx)^2}.$$

Задача 11. Найти производную.

$$y = x^{\sin x^3}.$$

$$y' = x^{\sin x^3}\left(3\cos(x^3)\cdot x^2 \cdot \ln x + \frac{\sin x^3}{x}\right).$$

Задача 12. Найти производную.

$$y = \frac{4x+1}{16x^2+8x+3} + \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{4x+1}{\sqrt{2}}.$$

$$y' = \frac{4(16x^2+8x+3)-(4x+1)(32x+8)}{(16x^2+8x+3)^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{1+\frac{(4x+1)^2}{2}}\cdot\frac{4}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{-64x^2-32x+4}{(16x^2+8x+3)^2} + \frac{4}{2}\cdot\frac{2}{2+(4x+1)^2} = \frac{-64x^2-32x+4}{(16x^2+8x+3)^2} + \frac{1}{2+16x^2+8x+1} =$$

$$= \frac{-64x^2-32x+4+16x^2+8x+3}{(16x^2+8x+3)^2} = \frac{-48x^2-24x+7}{(16x^2+8x+3)^2}.$$

Задача 13. Найти производную.

$$y = 2\arcsin\frac{2}{3x+4} + \sqrt{9x^2+24x+12},$$

$$y' = 2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{(3x+4)^2}}}\cdot\frac{-2\cdot 3}{(3x+4)^2} + \frac{18x+24}{2\sqrt{9x^2+24x+1)^2}} = 2\cdot\frac{3x+4}{\sqrt{9x^2+24x+16-4}}\cdot\frac{-6}{(3x+4)^2} +$$

$$+ \frac{-12}{(3x+4)\sqrt{9x^2+24x+12}} = \frac{-12}{(3x+4)\sqrt{9x^2+24x+12}} + \frac{9x+12}{\sqrt{9x^2+24x+12}} =$$

$$= \frac{-12+(9x+12)(3x+4)}{(3x+4)\sqrt{9x^2+24x+12}} = \frac{27x^2+72x+36}{(3x+4)\sqrt{9x^2+24x+12}}.$$

Задача 14. Найти производную.

$$y = \frac{1}{\sin\alpha}\ln(tgx + ctg\alpha).$$

$$y' = \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{tgx + ctg\alpha}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin\alpha\cos^2 x(tgx + ctg\alpha)}.$$

Задача 15. Найти производную y'_x.

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = tg\sqrt{1+t}. \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

$$x'(t) = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$y(t) = \frac{1}{\cos^2\sqrt{1+t}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+t}} = \frac{1}{2\sqrt{1+t}\cos^2\sqrt{1+t}}.$$

$$y'_x = -\frac{\sqrt{1-t^2}}{2t\sqrt{1+t}\cos^2\sqrt{1+t}}.$$

Задача 16. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в точке, соответствующей значению параметра $t = t_0$.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4, \\ y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3, t_0 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t_0) = 0, \\ y(t_0) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = t - t^3, \\ y' = t + t^2. \end{cases}$$

$$y'_x(t_0) = 1,$$

$$y - 0 = 1(x - 0),$$

$y = x$ - уравнение касательной,

$$y - 0 = -1(x - 0)$$

$y = -x$ - уравнение нормали.

Задача 17. Найти производную n -го порядка.

$y = a^{3x}.$

$y' = 3a^{3x} \ln a,$

$y'' = 9a^{3x} \ln^2 a,$

$y^{(n)} = 3^n a^{3x} (\ln a)^{(n)}.$

Задача 18. Найти производную указанного порядка.

$y = (2x^2 - 7)\ln(x-1),$

$$y' = 4x\ln(x-1) + \frac{2x^2-7}{x-1},$$

$$y'' = 4\ln(x-1) + \frac{4x}{x-1} + \frac{4x(x-1)-(2x^2-7)}{(x-1)^2} = 4\ln(x-1) + \frac{4x}{x-1} + \frac{2x^2-4x+7}{(x-1)^2},$$

$$y''' = \frac{4}{x-1} + \frac{4(x-1)-4x}{(x-1)^2} + \frac{(4x-4)(x-1)^2 - 2(x-1)(2x^2-4x+7)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{4}{x-1} - \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{10}{(x-1)^3},$$

$$y^{IV} = -\frac{4}{(x-1)^2} + \frac{8}{(x-1)^3} + \frac{30}{(x-1)^4},$$

$$y^{V} = \frac{8}{(x-1)^3} - \frac{24}{(x-1)^4} - \frac{120}{(x-1)^5}.$$

Задача 19. Найти производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически.

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = 1/t. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}, \\ y = -\dfrac{1}{t^2}. \end{cases}$$

$$y'_x = -\frac{1}{t^2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\right) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^3}.$$

$$y''_{xx} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\right) = -\frac{1-t^2}{t^4}$$

Задача 20. Показать, что функция y удовлетворяет данному уравнению.

$$y = \frac{\sin x}{x}, \;\; xy' + y = \cos x\,.$$

$$y' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}.$$

$$\frac{x\cos x - \sin x}{x} + \frac{\sin x}{x} = \cos x,$$

$$\frac{x\cos x - \sin x + \sin x}{x} = \cos x,$$

$$\cos x = \cos x,$$

$$0 = 0.$$